**Санкт-Петербургский государственный университет**

**Р А Б О Ч А Я П Р О Г Р А М М А**

**УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

Математический анализ

Mathematical Analysis

**Язык(и) обучения**

русский

Трудоемкость в зачетных единицах: 27

Регистрационный номер рабочей программы: 020800

**Раздел 1. Характеристики учебных занятий**

**1.1. Цели и задачи учебных занятий**

Дисциплина «Математический анализ» представляет обучающимся комплекс знаний, умений и навыков, позволяющих овладеть фундаментальными основами теории предела, диффе-ренциального и интегрального исчисления, теории меры, теории поля, теории рядов; она входит в перечень базовых дисциплин, формирующих основную подготовку специалиста в области математических наук, и служит основой для изучения других математических дисци-плин. Предлагаемый комплекс знаний необходим для успешного решения широкого класса прикладных и теоретических задач, связанных с количественным описанием переменных ве-личин, успешного изучения курсов дифференциальной геометрии, дифференциальных урав-нений, математической физики, методов вычислений, теории вероятностей и других. Отдель-ные параметры курса могут варьироваться по степени сложности в зависимости от уровня подготовки студентов.   
  
Курс должен быть построен на принципах компетентного, деятельного подхода к изучению содержащегося в нем теоретического материала, применению его к решению конкретных задач и алгоритмов.  
  
Для достижения поставленных целей в условиях ограниченных ресурсов предполагается рас-пределение содержания обучения по следующим видам деятельности: изложение материала преподавателем в аудитории в виде лекций; практические занятия под руководством препо-давателя, посвященные отработке основных теоретических положений курса и ознакомлению студентов с основными приемами и алгоритмами, применяемыми для решения типовых за-дач; выполнение студентами коллективных и индивидуальных заданий (в том числе в при-сутствии преподавателя).   
  
Основным методологическим принципом построения программы данного курса, равно как и всей концепции обучения, является принцип поэтапного системного накопления знаний. . Формирования необходимых компетенций происходит по модели: от простого и/или знакомого – к сложному и/или незнакомому, а основной методологической стратегией прохождения отдельных разделов программы является ступенчатость и цикличность, предусматривающие постепенный возврат к ранее усвоенному материалу на более высоком концептуальном уровне.  
  
Цели изучения дисциплины: обучение студентов теоретическим основам теории предела, дифференциального и интегрального исчисления функций от одной и нескольких вещественных переменных, теории числовых и функциональных рядов, началам теории функций комплексного переменного, теории поля и теории меры ; развитие у студентов доказательного, логического мышления; подготовка к восприятию других математических и специальных дисциплин, форми-рование соответствующих компетенций; приобретение навыков практического использования по-лученных знаний при решении конкретных математических и прикладных задач; составлении, анализе и реализации связанных с такими задачами алгоритмов.

**1.2. Требования подготовленности обучающегося к освоению содержания учебных занятий (пререквизиты)**

Для успешного освоения дисциплины студент должен иметь предварительную подго-товку в объеме курса математики, изучаемого в средней школе по программам, предполагаю-щим профильное изучение основных математических дисциплин.

**1.3. Перечень результатов обучения (learning outcomes)**

Знания, умения, навыки, осваиваемые обучающимся.  
• профессиональные знания и умения применения математического анализа в различных при-кладных областях науки и техники;  
  
• умение исследовать асимптотику и критические значения функций, владение методами инте-грирования функций одной и нескольких переменных, владение основными методами теории функций комплексной переменной и гармонического анализа в соответствии с программой учебной дисциплины.  
  
**1.4. Перечень и объём активных и интерактивных форм учебных занятий**

В качестве основных интерактивных форм предполагается   
  
• проведение практических занятий, посвященных применению разнообразных теоретических знаний к решению конкретных расчетных задач.

**Раздел 2. Организация, структура и содержание учебных занятий**

**2.1. Организация учебных занятий**

**2.1.1 Основной курс**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Трудоёмкость, объёмы учебной работы и наполняемость групп обучающихся | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Код модуля в составе дисциплины,  практики и т.п. | Контактная работа обучающихся с преподавателем | | | | | | | | | | | | Самостоятельная работа | | | | Объём активных и интерактивных  форм учебных занятий | Трудоёмкость |
| лекции | семинары | консультации | практические  занятия | лабораторные работы | контрольные работы | коллоквиумы | текущий контроль | промежуточная  аттестация | итоговая аттестация | под руководством преподавателя | в присутствии  преподавателя | сам. раб. с использованием  методических материалов | текущий контроль (сам.раб.) | промежуточная аттестация (сам.раб.) | итоговая аттестация  (сам.раб.) |
| ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Форма обучения: очная | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Семестр 1 | 60 |  | 2 | 45 |  |  |  |  | 4 |  |  |  | 87 |  | 54 |  | 15 | 7 |
|  | 1-100 |  | 1-100 | 1-20 |  |  |  |  | 1-100 |  |  |  | 1-1 |  | 1-1 |  |  |  |
| Семестр 2 | 60 |  | 2 | 45 |  |  |  |  | 4 |  |  |  | 104 |  | 37 |  | 15 | 7 |
|  | 1-100 |  | 1-100 | 1-20 |  |  |  |  | 1-100 |  |  |  | 1-1 |  | 1-1 |  |  |  |
| Семестр 3 | 60 |  | 2 | 45 |  |  |  |  | 4 |  |  |  | 95 |  | 46 |  | 15 | 7 |
|  | 1-100 |  | 1-100 | 1-20 |  |  |  |  | 1-100 |  |  |  | 1-1 |  | 1-1 |  |  |  |
| Семестр 4 | 60 |  | 2 | 45 |  |  |  |  | 4 |  |  |  | 68 |  | 37 |  | 15 | 6 |
|  | 1-100 |  | 1-100 | 1-20 |  |  |  |  | 1-20 |  |  |  | 1-1 |  | 1-1 |  |  |  |
| ИТОГО | 240 |  | 8 | 180 |  |  |  |  | 16 |  |  |  | 354 |  | 174 |  |  | 27 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Виды, формы и сроки текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации | | | | | | | | | |
| Код модуля в составе дисциплины, практики и т.п. | | Формы текущего контроля успеваемости | | Виды промежуточной аттестации | | | Виды итоговой аттестации  (только для программ итоговой аттестации и дополнительных образовательных программ) | | |
| Формы | Сроки | Виды | Сроки | | Виды | | Сроки |
| ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ | | | | | | | | | |
| Форма обучения очная | | | | | | | | | |
| Семестр 1 |  | |  | зачёт, устно, традиционная форма, экзамен, устно, традиционная форма | | по графику промежуточной аттестации, по графику промежуточной аттестации | |  |  |
| Семестр 2 |  | |  | зачёт, устно, традиционная форма, экзамен, устно, традиционная форма | | по графику промежуточной аттестации, по графику промежуточной аттестации | |  |  |
| Семестр 3 |  | |  | зачёт, устно, традиционная форма, экзамен, устно, традиционная форма | | по графику промежуточной аттестации, по графику промежуточной аттестации | |  |  |
| Семестр 4 |  | |  | зачёт, устно, традиционная форма, экзамен, устно, традиционная форма | | по графику промежуточной аттестации, по графику промежуточной аттестации | |  |  |

**2.2. Структура и содержание учебных занятий**

**Семестр 1.**

Модуль 1. Введение.

Множества. Отображения. Вещественные числа. Грани числовых множеств. Счетные и несчетные множества. Индукция. N-мерные пространства. Скалярное произведение. Длина вектора. Комплексные числа и действия с ними.

Модуль 2. Основы теории пределов.

Предел последовательности. Предел функции. Замечательные пределы.

Модуль 3. Дифференциальное исчисление функций одной переменной.

Касательная к графику, скорость, плотность. Теоремы Ферма, Роля, Лагранжа, Коши. Формула Тейлора. Исследование функций - характер монотонности, выпуклость, экстремумы, асимптоты. Простейшие методы приближенного решения уравнений, их компьютерная реализация.

Модуль 4. Неопределенный интеграл.

Понятие неопределенного интеграла. Основные правила нахождения первообразной. Обобщенные первообразные.

**Семестр 2.**

Модуль 5.Определенный интеграл.

Понятие определенного интеграла. Связь с задачей вычисления площади. Теоремы Барроу и Ньютона-Лейбница. Техника вычисления определенных интегралов. Несобственные интегралы. Аддитивные функции промежутка и прикладные задачи. Длина пути.

Модуль 6.Множества в конечномерных евклидовых и метрических пространствах. Элементы топологии.

Предел в метрическом пространстве. Характеристика компактных множеств в конечномерном пространстве. Непрерывные отображения. Теоремы Вейерштрасса и Кантора.

Модуль 7. Дифференциальное исчисление нескольких переменных.

Дифференциал и частные производные. Градиент и матрица Якоби. Гладкие функции и отображения. Равенство смешанных производных. Формула Тейлора для функций нескольких переменных. Исследование функции на локальный экстремум.

**Семестр 3**

Модуль 8. Обратное и неявное отображения. Диффеоморфизм. различные способы задания гладкой поверхности, их равносильность. Теорема Лагранжа об условном экстремуме

Модуль 9.Числовые ряды. Степенные ряды..

Необходимое условие и признаки сходимости. Теорема сравнения. Связь с несобственными интегралами. Операции с рядами. Степенные ряды, круг и радиус сходимости. Связь с рядами Тейлора, ряды Тейлора основных элементарных функций.

Модуль 10. Функциональные последовательности и ряды. Перестановки операций анализа. Начала теории функций комплексной переменной.

Теорема Стокса - Зейделя. Предельные переходы под знаками производной и интеграла. Криволинейный интеграл, комплексная дифференцируемость, конформность .. Представление функции рядами Лорана и Тейлора и его приложения к анализу, алгебре, механике.

Модуль 11.Теория меры и интеграл.

Счётные множества, их свойства, несчётность отрезка. Основные понятия теории меры.

Теорема Каратеодори. Мера Лебега, достаточные условия измеримости множества по Лебегу. Три этапа построения интеграла по мере. Теорема Леви о монотонной сходимости. Основные свойства интеграла по мере. Произведение мер. Теоремы Тонелли и Фубини. Замена переменной в кратном интеграле.

**Семестр 4**

Модуль 12. Мера на гладкой кривой и гладкой поверхности.

Криволинейные и поверхностные интегралы первого рода,. прикладные задачи связанные с ними. Векторные поля. Криволинейные и поверхностные интегралы второго рода. Потенциальные поля, условие потенциальности, интегрирование по кривой. Формула Гаусса – Остроградского. Закон Архимеда.

Модуль 13. Элементы анализа Фурье.

Полные ортогональные системы. Экстремальное свойство коэффициентов Фурье. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля. Классические ряды Фурье, формула Дирихле для частичных сумм. Признаки Дини и Дирихле – Жордана. Примеры разложений функций в ряды Фурье. Почленное интегрирование рядов Фурье. Полнота тригонометрической системы, теорема Фейера. Интеграл и преобразование Фурье.

**Раздел 3. Обеспечение учебных занятий**

**3.1. Методическое обеспечение**

**3.1.1 Методические указания по освоению дисциплины**

Успешное освоение дисциплины возможно благодаря посещению лекций, участию в обсуждении рассматриваемых вопросов, самостоятельной работе, включающей в себя чтение специальной литературы по разделам темы.

**3.1.2 Методическое обеспечение самостоятельной работы**

Самостоятельная работа студента, как вид деятельности, стимулирующий активность, самостоятельность, познавательный интерес с целью поиска необходимой информации, приобретения знаний, использования этих знаний для решения учебных, научных и профессиональных задач, представляет собой важную составляющую учебного процесса, которой отводится не менее половины учебного времени при очной форме обучения. В рамках данной дисциплины самостоятельная работа студентов является важным компонентом обучения, предусмотренным компетентностно-ориентированным учебным планом и рабочей программой учебной дисциплины. Время, отводимое на самостоятельную работу, должно использоваться студентами для наиболее полного освоения учебной дисциплины. Следовательно, организация эффективной внеаудиторной самостоятельной работы в процессе обучения требует, с одной стороны, создание условий, призванных обеспечить рациональное и планомерное управление учебной деятельностью, протекающей в отсутствие преподавателя, и тщательной подготовки целого ряда учебных пособий, снабженных методическими указания-ми, с другой стороны.  
. К числу методических пособий относятся:  
  
• общие методические рекомендации и указания по самостоятельной работе;  
  
• фонд контрольных заданий и тестов для самоконтроля, которые позволяют оценить уровень знаний, навыков и умений студентов согласно требованиям курса, государственным стандартам и европейским компетенциям.   
  
**3.1.3 Методика проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации и критерии оценивания**

Роль преподавателя в организации самостоятельной работы состоит в координации действий обучающихся в освоении дисциплины, в методическом и организационном обеспечении учебного процесса. Взаимодействие между преподавателем и студентом осуществляется в форме консультаций. Преподаватели также оказывают помощь студентам по планированию и организации самостоятельной работы.

Контроль за самостоятельной работой может осуществляться в форме коротких опросов, углубленных вопросов по темам занятий, дополнительных вопросов.

*Методика проведения зачета*

Зачет проводится в устной или письменной форме. Преподаватели имеют набор практических и теоретических заданий и тестов для проведения зачета. Зачет выставляется по итогам текущего контроля.

Использование конспектов и учебников, а также электронных устройств хранения, обработки или передачи информации при подготовке и ответе на вопросы зачета не разрешается. В случае обнаружения факта использования недозволенных материалов (устройств) составляется акт, и студент удаляется с зачета.

*Критерии выставления оценок:*

«Зачет» ставится за полностью решенные задания текущего контроля, контрольных тестов и заданий и правильные ответы на дополнительные вопросы преподавателя.

*Методика проведения экзамена*

Экзамен проводится в устной форме. Билет состоит из двух вопросов. Время подготовки ответа на вопросы билета составляет 60 минут.

Использование конспектов и учебников, а также электронных устройств хранения, обработки или передачи информации при подготовке и ответе на вопросы экзамена не разрешается. В случае обнаружения факта использования недозволенных материалов (устройств) составляется акт, и студент удаляется с экзамена.

После ответа на вопросы билета преподаватель задает несколько дополнительных вопросов, на основании оценки ответов на которые итоговая оценка по предмету может быть повышена или понижена.

*Критерии выставления оценок:*

Оценка «отлично» ставится за полностью раскрытый теоретический материал и правильные ответы на дополнительные вопросы преподавателя.

Оценка «хорошо» ставится за изложенный теоретический материал билета (возможно с помощью наводящих подсказок преподавателя) и правильные ответы на дополнительные вопросы преподавателя.

Оценка «удовлетворительно» ставится за знание ответов на основные вопросы по каждой теме.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если не выполняются условия для получения оценок «отлично», «хорошо» и «удовлетворительно».

**3.1.4 Методические материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации (контрольно-измерительные материалы, оценочные средства)**

Аппарат контроля за усвоением материалавключает в себя задания, контрольные работы, необходимые для эффективного контроля за усвоением учебного материала. Контрольные работы подразумевают самостоятельное решение студентом расчетных и расчетно- исследовательских задач, связанных с основными вопросами программы (примерный список экзаменационных вопросов приводится ниже). Например: в зависимости от возможных значений первого члена, исследовать сходимость и найти предел последовательности, каждый следующий член которой равен указанной дробно-линейной функции от предыдущего ее члена.

Примерный список вопросов к экзаменам по всем семестрам.

1 семестр.

1. Высказывания, действия с ними. Кванторы, построение отрицания.

2. Операции с множествами (включая декартово произведение), пересечение и объединение семейств множеств. Формулы Де Моргана.

3. Понятие отображения, частные случаи. График отображения. Образ и прообраз множества при отображении.

4. Суперпозиция отображений. Сюръекция, инъекция и биекция - определения и примеры. Обратное отображение, критерий обратимости.

5. Примеры обратных функций.

6. Счетные множества и их свойства.

7. Десятичная запись числа и несчетность отрезка.

8. Теорема о методе математической индукции. Неравенство Бернулли.

9. Бином Ньютона.

10. Комплексные числа, формы записи, простейшие действия.

11. Расширенная числовая ось. Максимальный и минимальный элементы числового множества. Аксиома полноты расширенной числовой оси (аксиома Кантора - Дедекинда). Точные границы (грани) числового множества и функции.

12. Существование и иррациональность корня из двух.

13. Теоремы о промежутках.

14. Верхняя и нижняя границы числового множества и функции. Лемма об ограниченных множествах и функциях.

16. Описание граней с помощью неравенств.

17. Свойства граней функций.

18. Неограниченность сверху натурального ряда. Принцип исчерпывания Евдокса - Архимеда. Принцип математической индукции.

19. Существование целой части вещественного числа. Плотность множества рациональных чисел на прямой .

20. Окрестности на расширенной числовой прямой--- определение и свойства . Проколотая окрестность. Точки сгущения и изолированные точки --- определения и примеры.

21. Определение предела функции на языке окрестностей. Переформулировка на языке неравенств. Формулировка отрицания. Частный случай предела --- предел последовательности.

22. Единственность предела, предел сужения, локальность предела.

23. Монотонность предела (предельный переход в неравенстве). Стабилизация знака в неравенстве.

24. Предельный переход в двойном неравенстве .

25. Предел композиции.

26. Локальная ограниченность функции, имеющей конечный предел.

27. Бесконечно малые --- определение, свойства, связь с пределом.

28. Предел суммы, произведения и частного.

29. Бесконечно большие --- определение и связь с бесконечно малыми.

30. Бесконечно большие и арифметика.

31. Односторонние пределы, их связь с пределом.

32. Теорема о пределе монотонной функции (с предварительным замечанием).

33. Предел монотонной последовательности.

34. Следствие об односторонних пределах монотонной функции.

35. Эквивалентные функции, символы Ландау --- определения и простейшие свойства. Примеры.

36. Вычисление предела , его запись с помощью символов Ландау.

37. Главная часть функции --- определение и примеры.

38. Ограниченность сходящейся последовательности. Теорема о пределе монотонной последовательности.

39. Определение подпоследовательности. Теорема о пределе подпоследовательности.

40. Число е. Лемма о корректности определения.

41. Описание точек сгущения с помощью последовательностей.

42. Принцип выбора Больцано -- Вейерштрасса.

43. Описание предела функции на языке последовательностей.

44. Принцип выбора для последовательностей.

45. Непрерывность функции в точке и на множестве; точки разрыва, их классификация. Примеры.

46. Простейшие свойства непрерывных функций.

47. Теорема Больцано -- Коши о корне, следствие о промежуточных значениях.

48. Теоремы Вейерштрасса о функциях непрерывных на промежутке.

49. Критерий непрерывности функции, монотонной на промежутке. Следствия о корне и обратных тригонометрических функциях.

50. Теорема о показательной функции.

51. Определение логарифмической и степенной функций, их основные свойства.

52. Теорема о замечательных пределах, связанных с показательной, логарифмической и степенной функциями. Их запись с помощью символов Ландау.

53. Определение производной и дифференциала. Критерий дифференцируемости, два следствия из него.

54. Производная и арифметика.

55. Дифференцирование суперпозиции и обратной функции.

56. Таблица производных.

57. Геометрический смысл производной. Касательная к графику, два способа её истолкования.

58. Точки локального экстремума функции. Теоремы Ферма и Ролля.

59. Теорема Лагранжа о среднем, формула конечных приращений. Следствие о функциях с ограниченной производной.

60. Монотонность и производная.

61. Теорема Дарбу о промежуточных значениях производной.

62. Теорема Коши о среднем.

63. Правило Бернулли -- Лопиталя для бесконечно малых.

64. Правило Бернулли -- Лопиталя для бесконечно больших.

65. Сравнение логарифмической, степенной и показательной функций.

66. Выпуклые функции --- определение и геометрическое истолкование. Лемма о трёх хордах.

67. Выпуклость и производная.

68. Неравенство Иенсена. Неравенство Коши между средним арифметическим и средним геометрическим.

69. Неравенства Юнга и Гёльдера.

70. Неравенство Минковского.

71. Определение производных высших порядков. Класс . Примеры.

72. Формула Лейбница для производной произведения.

73. Определение и свойства многочленов наилучшего приближения

функции в точке (единственность, линейность, интегрирование).

74. Формула Тейлора с остатком в форме Пеано.

75. Формулы Тейлора для экспоненты, косинуса и синуса.

76. Формулы Тейлора для логарифмической и степенной функций .

77. Пример непостоянной функции класса  с нулевыми производными в нуле.

78. Формулы Тейлора для арктангенса и арксинуса.

79. Формула Тейлора для тангенса (вывод рекуррентной формулы

для коэффициентов) .

80. Исследование функции на локальный экстремум с помощью формулы Тейлора.

81. Верхняя и нижняя огибающие числовой последовательности --- определение и простейшие свойства. Определение верхнего и нижнего пределов последовательности. Примеры.

82. Теорема о связи между ,,

83. Описание , с помощью неравенств.

2 семестр

1. Теорема о множестве первообразных . Неопределённый интеграл и его простейшие свойства.

2. Таблица неопределённых интегралов.

3. Основные правила интегрирования.

4. Равномерная непрерывность функции --- определение и примеры.

5. Теорема Кантора о равномерной непрерывности.

6. Определение и простейшие свойства интеграла.

7. Единственность и линейность интеграла.

8. Теорема Барроу об интеграле с переменным верхним пределом. Основная теорема интегрального исчисления (формула Ньютона - Лейбница).

9. Монотонность и знак интеграла. Следствие.

10. Двусторонняя оценка интеграла. Оценка абсолютной величины интеграла.

11. Замена переменной и интегрирование по частям в определённом интеграле.

12. Вычисление интегралов Валлиса .

13. Приближение интеграла интегральными суммами.

14. Формула Валлиса.

15. Теорема о среднем для определённого интеграла.

16. Теорема Тейлора с интегральным представлением остатка.

17. Определение несобственного интеграла. Примеры

18. Линейность несобственного интеграла и интегрирование по частям.

19. Замена переменной в несобственном интеграле.

20. Признак сходимости несобственного интеграла от неотрицательной функции. Следствия.

21. Теорема об абсолютно сходящихся несобственных интегралах.

22. Определение гамма функции Эйлера. Лемма о корректности определения.

23. Свойства гамма функции.

24. Формула дополнения для гамма-функции.

25. Интеграл Эйлера -- Пуассона.

26. Признак Дирихле сходимости несобственного интеграла. Тригонометрические интегралы.

27. Признак Абеля.

28. Определение интеграла в смысле Коши -- Римана.

29. Функции промежутка, аддитивность, примеры.

30. Теорема о плотности аддитивной функции промежутка.

31. Вычисление площадей криволинейных трапеции и сектора.

32. Объёмы тел вращения вокруг координатных осей.

33. Скалярное произведение и норма в пространстве  . Свойства нормы.

34. Определение пути и его длины.

35. Аддитивность длины пути.

36. Вычисление длины гладкого пути.

37. Длина графика гладкой функции, длина кривой в полярных координатах.

38. Вычисление массы неоднородной кривой.

39. Момент инерции неоднородной кривой относительно начала координат.

40. Вычисление работы переменной силы вдоль пути.

41. Сходимость и покоординатная сходимость в.

42. Внутренние, внешние и граничные точки множестваи в метрическом пространстве. Внутренность и граница шара.

43. Описание граничных точек и точек сгущения с помощью последовательностей.

44. Теорема о характеризации замкнутых множеств.

45. Многомерный принцип выбора.

46. Определение компактных множеств.

47. Теорема о свойствах открытых и замкнутых множеств.

48. Предел отображения, локальная ограниченность отображения, имеющего предел. Теорема о покоординатной сходимости. Описание предела на языке последовательностей.

49. Непрерывные отображения. Теорема о непрерывном образе компактного множества.

50. Теоремы Вейерштрасса о непрерывных функциях нескольких переменных.

51. Линейно связные множества. Теорема о корне. Следствие о непрерывном образе линейно связного множества.

52. Теорема Кантора о равномерной непрерывности в многомерном случае.

53. Линейные отображения. Лемма о норме линейного отображения.

54. Определение дифференцируемого отображения, его дифференциал и матрица Якоби. Градиент функции нескольких переменных.

55. Теорема о покоординатной дифференцируемости.

56. Дифференцирование линейного и аффинного отображений. Линейность операции дифференцирования.

57. Дифференцирование суперпозиции.

58. Матрица Якоби обратного отображения. Необходимое условие дифференцируемости обратного отображения.

59. Частные производные. Необходимое условие дифференцируемости. Вычисление градиента и матрицы Якоби.

60. Геометрический смысл градиента.

61. Дифференцирование сложной функции нескольких переменных (правило цепочки).

62. Достаточное условие дифференцируемости отображения.

63. Частные производные высших порядков. Классы .

64. Теорема о равенстве смешанных производных, следствие.

65. Мультииндексы и связанные с ними обозначения.

66. Дифференцирование композиции гладкой и аффинной функции одного аргумента.

67. Формула Тейлора для функций нескольких переменных. Полиномиальная формула Ньютона.

68. Локальный экстремум функции нескольких переменных. Стационарные точки, теорема Ферма.

69. Квадратичные формы, их классификация. Оценка снизу положительно определённой квадратичной формы.

70. Исследование функции нескольких переменных на локальный экстремум с помощью второго дифференциала.

71. Неравенство Лагранжа.

72. Теорема о непрерывно дифференцируемых (гладких) отображениях.

73. Определения гомеоморфизма и диффеоморфизма.

74. Оценка приращения гладкого отображения.

75. Теорема об открытом отображении.

76. Теорема о гладкости обратного отображения.

77.Теорема о неявной функции.

78. Относительный экстремум --- определение и неформальное объяснение необходимого условия.

89. Теорема о множителях Лагранжа.

80. Существование вещественного собственного числа у симметричной вещественной матрицы.

3 семестр

1.Числовой ряд, его сумма, сходимость. Линейность суммы, необходимое условие сходимости. Комплексные ряды. Остаток ряда.

2. Примеры

3. Критерий сходимости неотрицательного ряда, теорема сравнения, замена на эквивалентный ряд.

4. Теорема об абсолютно сходящихся рядах (с леммой).

5. Интегральный признак Коши. Обобщённый гармонический ряд.

6. Константа Эйлера.

7. Признак Даламбера.

8. Признак Коши.

9. Определение степенного ряда. Теорема Коши -- Адамара о радиусе сходимости.

10. Признак Лейбница.

11. Преобразование Абеля конечных сумм и рядов.

12. Признак Дирихле, следствие о тригонометрических рядах.

13. Признак Абеля.

14. Примеры.

15. Бесконечное произведение --- определение и простейшие свойства.

15. Примеры бесконечных произведений, сходимость.

16. Связь между рядами и бесконечными произведениями. Абсолютно сходящиеся произведения, лемма об оценке конечного произведения. Оценка абсолютно сходящегося бесконечного произведения.

17. Произведения Гаусса -- Эйлера и Вейерштрасса -- Эйлера для Г-функции, разложение синуса в бесконечное произведение (без доказательств).

18. Теорема о перестановке слагаемых в неотрицательных и абсолютно сходящихся рядах.

19. Перемножение неотрицательных рядов по правилу Коши. Следствия о перемножении абсолютно сходящихся рядов.

20. Теорема о суммировании неотрицательного ряда по группам. Следствие об абсолютно сходящихся рядах.

21. Теорема о неотрицательных повторных рядах. Следствие об абсолютно сходящихся рядах.

22. Ряд Тейлора --- определение и лемма.

23. Достаточное условие разложимости функции в ряд Тейлора.

24. Ряды Тейлора функций экспоненты, синуса и косинуса.

25. Ряды Тейлора функций 

26. Пример бесконечно дифференцируемой функции, нераскладываемой в ряд Тейлора.

27. Определение комплексной дифференцируемости. Примеры.

28. Лемма о радиусе сходимости формально продифференцированного степенного

ряда.

29. Теорема о дифференцировании суммы степенного ряда. Следствие о связи с рядами Тейлора.

30. Перемножение степенных рядов.

31. Экспонента, синус и косинус на комплексной плоскости --- определение и основные свойства. Формулы Эйлера. Геометрическое истолкование экспоненты. Неограниченность синуса и косинуса на комплексной плоскости.

32. Дифференцирование синуса, косинуса, экспоненты

33. Перестановки операций анализа --- постановка задачи, примеры.

34. Определение равномерной сходимости последовательности функций, сравнение с

поточечной сходимостью, отрицание равномерной сходимости.

35. Чебышёвское расстояние --- определение и свойства, связь с равномерной сходимостью. Геометрическое истолкование равномерной сходимости.

36. Предельный переход под знаками интеграла и производной.

37. Теорема Стокса -- Зайделя о перестановке двух пределов.

38. Равномерная и поточечная сходимости функциональных рядов. Лемма об остатке

равномерно сходящегося ряда. Необходимое условие равномерной сходимости.

39. Признаки Лейбница и Вейерштрасса равномерной сходимости функционального

ряда.

40. Признак Дирихле равномерной сходимости функционального ряда. Следствие о тригонометрических рядах.

41. Признак Абеля равномерной сходимости функционального ряда.

42. Теорема о свойствах суммы равномерно сходящегося функционального ряда. Криволинейный интеграл, комплексная дифференцируемость, конформность .. Представление функции рядами Лорана и Тейлора и его приложения к анализу, алгебре, механике.

43. Криволинейный интеграл.

44. Комплексная дифференцируемость, теорема Коши Римана. Комплексная дифференцируемость под знаком криволинейного интеграла.

45. Формула Коши.

46. Лемма о непрерывности интеграла, зависящего от параметра.

47. Правило Лейбница дифференцирования интеграла по параметру.

48.Дифференцируемость комплексной функции и ее разложение в степенной ряд. Аналитические функции. Аналитическое продолжение.

49. Ряд Лорана. Вычеты.

50. Изолированные особые точки, полюса.

51. Теорема Лиувилля. Теорема о характеризации многочлена; конформных отображений простейших областей и их характеризация..

52. Гомотопные пути. Теорема о вычетах.

53. Вычисление несобственных интегралов с помощью вычетов. Формула дополнения для гамма-функции.

54. Полукольцо, кольцо алгебра множеств.

55. Аддитивные и счетно аддитивные функции. Примеры.

56. Продолжение аддитивной функции с полукольца на кольцо.

57. Счетная аддитивность продолжения с полукольца на кольцо.

58. Лемма о произведении полуколец. Следствие о полукольце ячеек.

59. Мера, объем (определение, примеры).

60. Счетная аддитивность произведения мер.

61. Теорема о структуре открытого множества.

62. Лемма о свойствах объёма.

63. Теоремы о счётной полуаддитивности и о непрерывности снизу.

64. Теорема о классическом m-мерном объёме.

65. Классический объём --- как мера.

66. Внешняя мера, порождённая мерой, --- определение и свойства.

67. Нуль-множества, их свойства.

68. Хорошо разбивающие множеств --- определение и простейшие свойства.

69. Теорема Каратеодори о стандартном продолжении меры с полукольца.

70. Определение полной меры. Признак измеримости множества.

71. Определение меры Лебега. Измеримость по Лебегу открытых и замкнутых множеств.

72. Вычисление внешней меры Лебега с помощью открытых множеств.

73. Приближение измеримых по Лебегу множеств открытыми и замкнутыми.

74. Строение измеримого по Лебегу множества. Регулярность меры Лебега.

75. Мера Лебега при сдвиге, гомотетии и повороте.

4 семестр

1. Лебеговы множества функции. Теорема об измеримых функциях.

2. Предельный переход в классе измеримых функций.

3. Приближение неотрицательной измеримой функции простыми. Следствие о знакопеременной функции.

4. Достаточное условие измеримости функции относительно меры Лебега.

5. Арифметические действия с измеримыми функциями.

6. Определение интеграла по мере (три этапа).

7. Свойства интеграла от простой неотрицательной функции.

8. Свойства интеграла от измеримой неотрицательной функции.

9. Теорема Леви - Лебега.

10. Интегрирование суммы неотрицательных измеримых функций.

11. Теорема Леви для рядов. Счётная аддитивность интеграла.

12. Эквивалентные (по мере) функции, их интегрирование. Интегрирование функций, заданных почти везде.

13. Теорема Фату.

14. Суммируемые функции, их простейшие свойства.

15. Линейность интеграла.

16. Теорема Лебега о мажорированной сходимости. Упрощённый вариант.

17. Приближение суммируемой функции простыми.

18. Абсолютная непрерывность интеграла.

19. Интегрирование векторнозначных и комплексных функций.

20. Интегрирование по дискретной мере.

21. Интеграл по мере Лебега как предел интегральных сумм.

22. Принцип Кавальери (вычисление меры множества с помощью мер его сечений).

23. Вычисление объёмов цилиндра и конуса.

24. Геометрический смысл интеграла по мере Лебега.

25. Теорема Тонелли.

26. Теорема Фубини.

27. Образ сигма-алгебры при биективном отображении и взвешенный образ меры.

28. Теорема об интегрировании по взвешенному образу меры.

29. Теорема об изменении меры Лебега при диффеоморфизме (без док-ва). Геометрический смысл якобиана. Замена переменных в кратном интеграле.

30. Частные случаи замены переменных в интеграле (сдвиг, линейная замена, полярные координаты). Интеграл Эйлера -- Пуассона.

31. Введение цилиндрических и сферических координат в тройном интеграле.

32. Связь между В- и Г-функциями Эйлера.

33. Вычисление объёма m-мерного шара.

34. Суммируемость степеней нормы.

35. Гладкая кривая, определение меры (длины) на ней. Независимость от выбора параметризации.

36. Криволинейный интеграл I рода --- определение и формула для его вычисления.

37. Определение и примеры векторных полей.

38. Ориентация кривой. Криволинейный интеграл II рода --- определение и формула для его вычисления. Пример --- вычисление работы силы тяготения.

39. Потенциальные векторные поля. Теорема об интегрировании потенциальных векторных полей.

40. Необходимое условие потенциальности векторного поля (уравнения замкнутости).

41. Критерий потенциальности векторного поля в шаре.

42. Независимость криволинейного интеграла II рода от деформации кривой. Интегрирование в односвязной области.

43. Формула Грина.

44. Простая (элементарная) поверхность. Нестрогие рассуждения, связанные с определением площади. Определение площади на простой гладкой поверхности.

45. Поверхностный интеграл I рода по простой гладкой поверхности --- определение и формула для вычисления. Интегрирование по графику гладкой функции.

46. Понятие гладкой и кусочно гладкой поверхности и площади на ней.

47. Сторона гладкой поверхности. Поверхностный интеграл II рода по простой гладкой поверхности --- определение и формула для вычисления в случае простой поверхности. Интегрирование по графику гладкой функции.

48. Формула Гаусса -- Остроградского. Дивергенция векторного поля.

49. Интеграл Гаусса.

50. Закон Архимеда.

51. Вычисление криволинейного интеграла II рода по кривой, лежащей на графике гладкой функции двух переменных.

52. Относительная граница компакта, лежащего на поверхности, согласование её ориентации с выбором стороны поверхности.

53. Формула Стокса. Вихрь векторного поля.

54. Тригонометрические суммы и тригонометрические ряды. Лемма о тригонометрической системе. Вычисление коэффициентов тригонометрического ряда.

55. Классы периодических функций. Определение коэффициентов Фурье и ряда Фурье функций, интегрируемых с квадратом. Эквивалентность двух форм записи ряда Фурье.

56. Теорема о непрерывности суммируемой на прямой функции в среднем (без док-ва).

Теорема Римана -- Лебега. Следствие о коэффициентах Фурье.

57. Лемма о коэффициентах Фурье функций из класса .

58. Формула Дирихле для частичных сумм ряда Фурье. Ядро Дирихле, его график.

59. Признак Дини сходимости ряда Фурье в точке. Упрощённый вариант признака.

60. Принцип локализации Римана.

61. Примеры разложений функций в ряды Фурье.

62. Бесконечное произведение для синуса.

63. Теорема Фейера.

64. Следствия из теоремы Фейера: теорема единственности для коэффициентов Фурье и поведение ряда Фурье в точке непрерывности функции.

65. Пространство (его линейность, определение скалярного произведения и нормы).

66. Ортогональные функции в . Ортогональность тригонометрической системы. Теорема Пифагора.

67. Экстремальное свойство коэффициентов Фурье. Неравенство Бесселя.

68. Ряды Фурье функций с произвольным периодом.

69. Преобразование Фурье суммируемой функции. Нестрогий вывод формулы обращения.

**3.1.5 Методические материалы для оценки обучающимися содержания и качества учебного процесса**

Примерная анкета-отзыв по преподаванию дисциплины

Просим Вас заполнить анонимную анкету-отзыв по пройденному Вами курсу. Обобщенные данные анкет будут использованы для совершенствования преподавания. По каждому вопросу проставьте соответствующие оценки по шкале от 1 до 10 баллов (обведите выбранный Вами балл). В случае необходимости впишите свои комментарии.

1. Насколько Вы удовлетворены содержанием дисциплины в целом?

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Комментарий\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

1. Насколько Вы удовлетворены формами преподавания?

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Комментарий\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

1. Как Вы оцениваете качество подготовки предложенных учебно–методических материалов?

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Комментарий\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

1. Насколько Вы удовлетворены использованием преподавателями интерактивных и активных методов обучения ?

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Комментарий\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

1. Какие из тем дисциплины Вы считаете наиболее полезными, ценными с точки зрения дальнейшего обучения и/или применения в последующей практической деятельности?
2. Что бы Вы предложили изменить в методическом и содержательном плане для совершенствования преподавания данной дисциплины?

СПАСИБО!

**3.2. Кадровое обеспечение**

**3.2.1 Образование и (или) квалификация штатных преподавателей и иных лиц, допущенных к проведению учебных занятий**

К чтению лекций могут быть допущены преподаватели, имеющие ученую степень доктора или кандидата наук (в том числе степень PhD, прошедшую установленную процедуру призна-ния и установления эквивалентности) и/или ученое звание профессора или доцента. Препода-ватели, привлекаемые к проведению практических занятий, должны иметь базовое образова-ние и/или ученую степень, соответствующие профилю преподаваемой дисциплины.

**3.2.2 Обеспечение учебно-вспомогательным и (или) иным персоналом**

Специальных требований нет.

**3.3. Материально-техническое обеспечение**

**3.3.1 Характеристики аудиторий (помещений, мест) для проведения занятий**

В аудиториях, где проводятся занятия, необходимо наличие досок и средств письма на них.

**3.3.2 Характеристики аудиторного оборудования, в том числе неспециализированного компьютерного оборудования и программного обеспечения общего пользования**

Стандартно оборудованные компьютерные аудитории для проведения практических занятий и интерактивных семинаров: видеопроектор, экран, др. оборудование.

**3.3.3 Характеристики специализированного оборудования**

Специальных требований нет.

**3.3.4 Характеристики специализированного программного обеспечения**

Специальных требований нет.

**3.3.5 Перечень и объёмы требуемых расходных материалов**

не требуются.

**3.4. Информационное обеспечение**

**3.4.1 Список обязательной литературы**

1. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Астрель, 2005.

2. Зорич В.А. Математический анализ.Ч. 1-2.– М.: МЦНМО, 2012.

3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 1. – СПб: Лань, 2009-2016.

3.1 ЭБС «Лань» по подписке СПбГУ: https://proxy.library.spbu.ru:2290/book/71768#book\_name

4. Вулих Б.З. Краткий курс теории функций вещественной переменной. - М., 1973.

5. Маркушевич А.И. Краткий курс теории аналитических функций. - М., 1978.  
  
**3.4.2 Список дополнительной литературы**

1. Хавин В.П. Основы математического анализа: Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной вещественной переменной: учебное пособие / В. П. Хавин ; Ленинградский Государственный университет. - Л : Издательство Ленинградского университета, 1989. - 446 с.

2. Рудин У. Основы математического анализа/Пер. с англ. В.П. Хавина. – М.: Мир, 1976-2004.

3. Теория меры и интеграла. В 3-х частях /Под ред. Макарова Б.М. - Л., 1974-1977.

4. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. В 3-х томах. - М., 1988-1989.

5. Кудрявцев и др. Сборник задач по математическому анализу. В 3-х томах. – М.: Наука, 1984-1995. Мм – 29 экз.

6. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу. В 2-х томах. – М., 2000-2002.

7. Макаров Б.М., Голузина М.Г., Лодкин А.А., Подкорытов А.Н. Избранные задачи по вещественному анализу. - СПб, 2004.

8. Виноградов О.Л., Громов А.Л. Курс математического анализа. Часть 1. – СПб: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2009.  
**3.4.3 Перечень иных информационных источников**

Не предусмотрено

**Раздел 4. Разработчики программы**

Виноградов О.Л, д.ф.-м.н., профессор СПбГУ  
Флоринский А. А., к.ф.-м.н., доцент СПбГУ, florinskiy.a@gmail.com